النهايـــات والاتصـــــال

I- أنشطـــة :

1- أحسب النهايات التالية :

- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to 1} x^2+x+1$

$= 3$

- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+5)}{3(x-2)\left(x+\frac{1}{3}\right)}$

$= \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+5}{3\left(x+\frac{1}{3}\right)}$

$= 1$

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)-1}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+1}$

$= \dfrac{1}{2}$

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}$ مع : $0\prec q$ و $0\prec p$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(x^2+p^2-p^2\right)\left(\sqrt{x^2+q^2}+q\right)}{\left(x^2+q^2-q^2\right)\left(\sqrt{x^2+p^2}+p\right)}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+q^2}+q\right)}{\left(\sqrt{x^2+p^2}+p\right)}$

$= \dfrac{2q}{2p}$

$$= \frac{q}{p}$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$

لنحسب :

$$S = 1+2+3+\ldots+n$$
$$S = n+(n-1)+(n-2)+\ldots+1$$
$$2S = \underbrace{(n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1)}_{\text{n مـــــرة}}$$
$$2S = n(n+1)$$
$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

إذن :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\frac{n^2}{n^2}$$
$$= \frac{1}{2}$$

- $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin 3x}{x}$

تذكيـر :

$$\lim_{X\to0} \frac{\sin X}{X} = 1$$

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x\to0} \frac{\sin 3x}{3x} \times 3$$
$$= \lim_{X\to0} \frac{\sin X}{X} \times 3 = 3$$

- $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\tan x}{4x}$

تذكيـر :

$$\lim_{X\to0} \frac{\tan X}{X} = 1$$

$$\lim_{x\to0} \frac{\tan x}{4x} = \frac{1}{4}$$

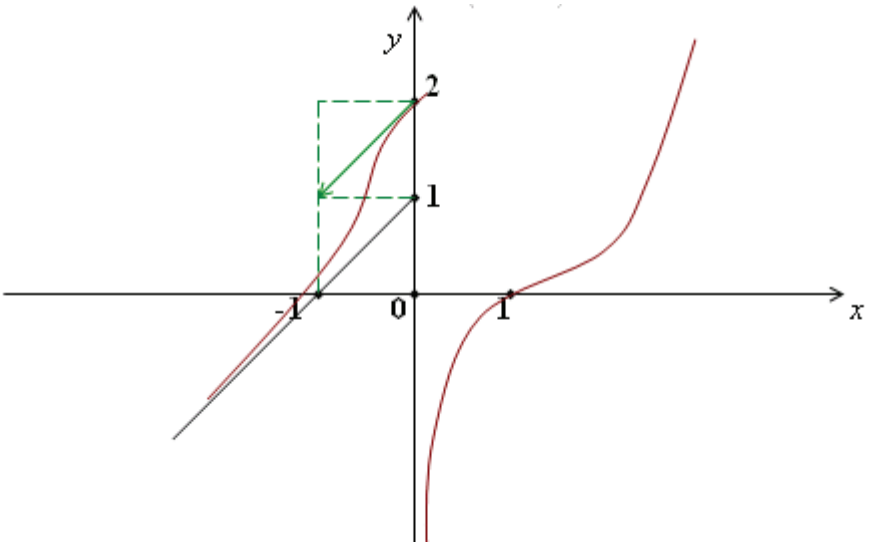
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{2}{+\infty} = 0$$

2- ليكن ℓ_f المنحنى الممثل للدالة f في م.م.م. $(O,\vec{i},\vec{j})$.



- **حدد D_f.**
- **حدد النهايات التالية :**

* $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

* $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

* $\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x)$
* $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)$
* $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$
* $\lim_{x\to-\infty} f(x)-x$
* $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$
* $\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{f(x)-2}{x}$

الجـــواب :

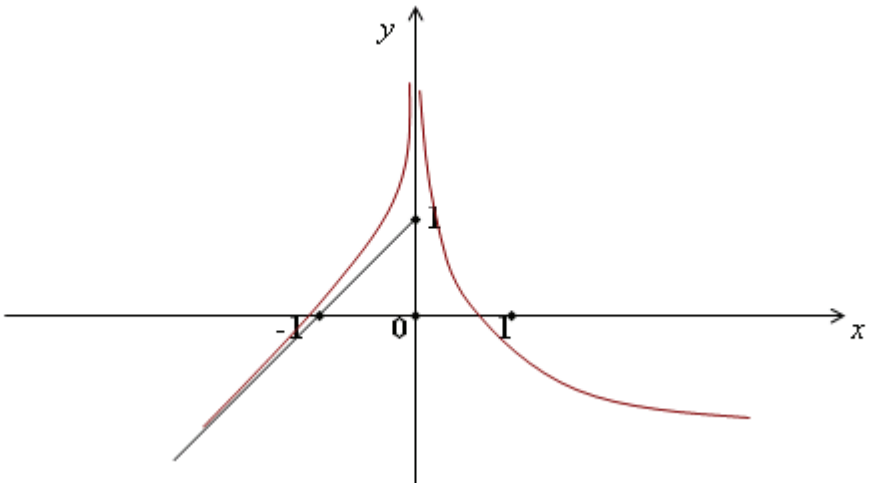
- $D_f =]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$
- * $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
* $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = +\infty$
* $\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x) = 2$
* $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$
* $\lim_{x\to-\infty} f(x)-x = 1$

* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{f(x)-2}{x} = 1$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

(لأن ℓ_f يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب).

3- ليكن (ℓ_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم.



- حدد D_f .
- حدد النهايات التالية :

* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$
* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)$
* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

- هل f متصلة في 0 ؟
- حدد :

* $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$
* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-x$
* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

- أعط جدول تغيرات f ، ثم جدول تغيرات الدالة $g=|f|$.

الجـــواب :

- $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ $\quad]0,[$ $\quad [$

* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = +\infty$
* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

- f ليست متصلة لأن : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$

- * $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}=1$

  * $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-x=1$

  * $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=0$

-

x	$-\infty$		**0**		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$		
	$-\infty$				$-\infty$

x	$-\infty$	**-1**		**0**		**1**	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$	$+\infty$			$+\infty$
		0				**0**	

4- حدد مجموعة تعريف الدوال التالية :

- $f(x)=\sqrt{|x|\left(x^2-1\right)}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R} \;/\; |x|\left(x^2-1\right)\geq 0\right\}$

x	$-\infty$	**-1**		**0**		**1**	$+\infty$
x^2-1	+		-		-		+
$\lvert x\rvert$	+		+		+		+
$\lvert x\rvert\left(x^2-1\right)$	+		-		-		+

$D_f=]-\infty,-1]\cup\{0\}\cup[1,+\infty[$

- $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{x}-x^2}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\; x\neq 0 \text{ و } \dfrac{1}{x}-x^2\geq 0\right\}$

$\dfrac{1}{x}-x^2=\dfrac{1-x^3}{x}$

$=\dfrac{(1+x)\left(1+x+x^2\right)}{x}$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$1-x$	+	+	-	
x	-	+	+	
$\frac{1-x}{x}$	-	+	-	

$$D_f =]0,1]$$

5- لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$f(x)=\frac{1-\cos(x-1)}{(x-1)^2}$$

- **حدد D_f .**
- **بين أنه يمكن تمديد f باتصال في 1 .**
- **ليكن g هذا التمديد بالاتصال، حدد D_g ، ثم أحسب نهايات g عند محدات D_g .**

الأجـوبـة :

- $D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$
- **لنحسب** $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{1-\cos(x-1)}{(x-1)^2}$$

نضع : $X = x-1$

$$(x\to 1) \Leftrightarrow (X \to 0)$$

إذن :

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{X\to 0} \frac{1-\cos X}{X^2} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$$

إذن : f تقبل تمديد باتصال في 1 .

وهذا التمديد هو الدالة g المعرفة بـ :

$$\begin{cases} g(x)=f(x) \\ g(1)=\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{و} \quad x\neq 1$$

- $D_g = \mathbb{R}$

لدينا :

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad -1 \le \cos x \le 1$$

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad -1 \le \cos(x-1) \le 1$$

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad -1 \le -\cos(x-1) \le 1$$

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad 0 \le 1-\cos(x-1) \le 2$$

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\} \quad 0 \le \frac{1-\cos(x-1)}{(x-1)^2} \le \frac{2}{(x-1)^2}$$

وبما أن :

$$\lim_{|x|\to+\infty} \frac{2}{(x-1)^2} = 0$$

إذن : $\lim\limits_{|x|\to+\infty} g(x) = 0$

6- ليكن k عددا حقيقيا و f دالة معرفة بـ :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + kx + 1 & ; \quad x > 1 \\ f(x) = \dfrac{x+1}{x-2} & ; \quad x \le -1 \end{cases}$$

حدد k لكي تكون الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$.

الجـــواب :

لدينا f متصلة على $]-\infty;-1[$ و $]-1;+\infty[$

إذن : لكي تكون f ممتصلة على $\mathbb{R}$ يكفي أن تكون متصلة في -1 .

ولهذا يكفي ان تكون :

$$\lim_{\substack{x\to-1 \\ x<-1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-1 \\ x>-1}} f(x) = f(-1)$$

أي : $0 = 2 - k$

$k = 2$

7- أحسب النهايتين :

-a $\lim\limits_{x\to0^+} \sin x \cdot \sin\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

لدينا : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad -1 \le \sin\dfrac{1}{\sqrt{x}} \le 1$

أي : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \left|\sin\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right| \le 1$

إذن : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \left|\sin x \cdot \sin\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right| \le |\sin x|$

وبما أن : $\lim\limits_{x\to0^+} |\sin x| = 0$

فإن : $\lim\limits_{x\to0^+} \left|\sin x \cdot \sin\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right| = 0$

ومنه : $\lim\limits_{x\to0^+} \sin x \cdot \sin\dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$

-b $\lim\limits_{|x|\to+\infty} x^2 (\cos x + 2)$

لدينا : $\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \le \cos x \le 1$

إذن : $\forall x \in \mathbb{R} \quad 1 \le \cos x + 2 \le 3$

ومنه : $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \le x^2(\cos x + 2) \le 3x^2$

وبما أن : $\lim\limits_{|x|\to+\infty} x^2 = +\infty$

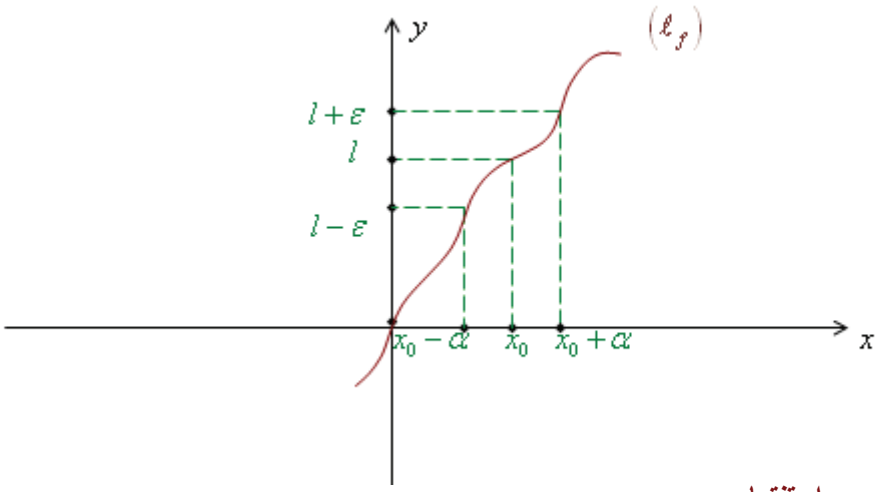
فإن : $\lim\limits_{|x|\to+\infty} x^2\left(\cos x + 2\right) = +\infty$

II- تعاريـــف :

1- النهايـــات :

لتكن f دالة عددية حيز تعريفها يحتوي على مجال مفتوح منقط مركزه x_0.

نقول أن نهاية $f(x)$ عندما تؤول x إلى x_0 هي l إذا وفقط إذا كان : كلما اقتربت x من x_0 فإن $f(x)$ تقترب من l.



استنتـاج :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \;/\; x_0 \in \mathbb{R} \;;\; l \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon \succ 0)\;;\; \exists \alpha \succ 0 \;/\; \forall x \in D_f \;;\; 0 < |x_0 - x| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

ملاحظـات :

1- $x_0 \in \mathbb{R}\;;\; l \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$$

$$\Leftrightarrow (\forall A \succ 0)\;;\; \exists \alpha \succ 0\;;\; (x \in D_f)\;;\; 0 < |x_0 - x| < \alpha \Rightarrow f(x) > A$$

2- $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$$

$$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon \succ 0)\;\; \exists B \succ 0 \;/\; (x \in D_f)\;;\; x > B \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

3- $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\Leftrightarrow (\forall A \succ 0)\;\; \exists B \succ 0 \;/\; (x \in D_f)\;;\; x > B \Rightarrow f(x) > A$$

c العمليات على النهايات :

$$(l \cdot l') \in \mathbb{R}^2$$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0}(f+g)(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0}(f\times g)(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)$
l	l'	$l + l'$	$l \cdot l'$	$\frac{l}{l'}\ ;\ l'\neq 0$
$l \succ 0\ ;\ l$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0
$l \succ 0\ ;\ l$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
$-\infty$	$l'\ ;\ l' \succ 0$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$F.I$
$+\infty$	$-\infty$	$F.I$	$-\infty$	$F.I$
0	$+\infty$	$+\infty$	$F.I$	0
0	0	0	0	$F.I$

الأشكال غير المحددة :

$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$	$0 \times \infty$	$(+\infty)\infty - (+\ )$

2- الاتصـــال

لتكن f دالة عددية حيز تعريفها يحتوي على مجال مفتوح مركزه x_0 ، $x_0 \in \mathbb{R}$

- نقول أن f متصلة في x_0 إذا وفقط إذا كان :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

- نقول أن f متصلة في x_0 على اليمين إذا وفقط إذا كان :

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0) \ .$$

- نقول أن f متصلة في x_0 على اليسار إذا وفقط إذا كان :

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

التمديد بالاتصال :

لتكن f دالة عددية حيز تعريفها D_f يحتوي على مجال مفتوح منقط مركزه x_0 ، $x_0 \notin D_f$.

نقول أن : f تقبل تمديدا باتصال في x_0 إذا وفقط إذا كانت نهاية $f(x)$ عند x_0 منتهية.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

الدالة g المعرفة بـــ :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) \ ; \ x \in D_f \\ g(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \end{cases}$$

تسمى تمديد f باتصال في x_0 .

الاتصال على مجال :

تكون f متصلة على المجال $[a,b]$ إذا وفقط إذا كانت متصلة على $]a,b[$ ومتصلة في a على اليمين وفي b على اليسار.

3- مركب دالتين Composée de 2 fonctions

تمهيـــد :

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين بـ :

$$f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{|x^2-1|}} \qquad \text{و} \qquad g(x)=\frac{1}{\sqrt{1+|x|}}$$

حدد $gof(x)$

أحسب $\lim\limits_{x\to 1} gof(x)$

الجـــواب :

$$D_g=\mathbb{R} \;;\; D_f=\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$$

$$gof(x) = \frac{1}{\sqrt{1+|f(x)|}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{|x-1|}{\sqrt{|x^2-1|}}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{|x-1|^2}{|x^2-1|}}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\left|\frac{(x-1)^2}{x^2-1}\right|}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\left|\frac{x-1}{x+1}\right|}}}$$

أي : $\lim\limits_{x\to 1} gof(x)=1$

حساب $\lim\limits_{x\to 1} gof(x)$

لدينا :

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{|x^2-1|}}$$

$$= \lim_{x\to 1} \pm\sqrt{\frac{(x-1)^2}{|x^2-1|}}$$

$$= \lim_{x\to 1} \pm \sqrt{\left|\frac{x-1}{x+1}\right|} = 0$$

وبما أن : $\lim_{x\to 0} g(x) = g(0) = 1$

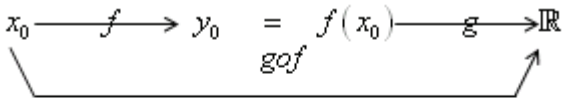
فإن : $\lim_{x\to 0} gof(x) = 1$

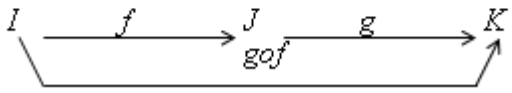
خاصيـــات :

1- مركبة دالتين متصلتين هي دالة متصلة.

2- إذا كانت f متصلة في x_0 و g دالة متصلة في $y_0 = f(x_0)$.

فإن : gof متصلة في x_0.





3-

إذا كانت f متصلة على I و g متصلة على J حيث $f(I) \subset J$

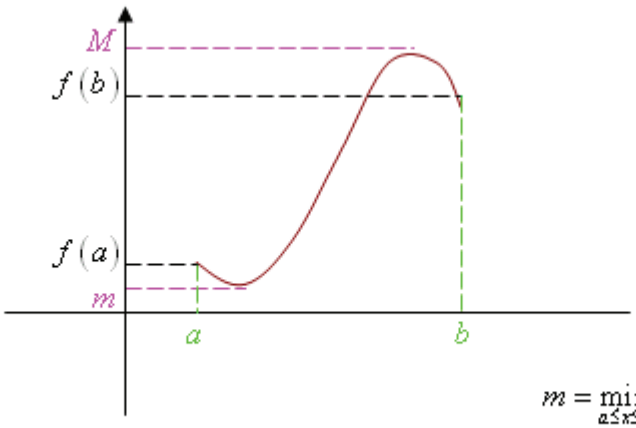
فإن : gof متصلة على I .

إذا كانت f تقبل نهاية في x_0 ، $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$ و g دالة متصلة في y_0.

فإن : $\lim_{x\to x_0} gof(x) = g(y_0)$

4- صورة مجال بدالة متصلة :

متصلة على مجال $[a,b]$.



لتكن $m = \min_{a\le x\le b} f(x)$

$M = \max_{a\le x\le b} f(x)$

نلاحظ أن :

$$\in(\forall y \in [m;M])\ (\exists x\ \ [a,b])\ /\ f(x)\ \ y$$

وهذا يعني أن :

لكل عنصر من المجال $J=[m,M]$ سابق من $I=[a,b]$ ، في هذه الحالة نقول أن f شمولية من I نحو J.

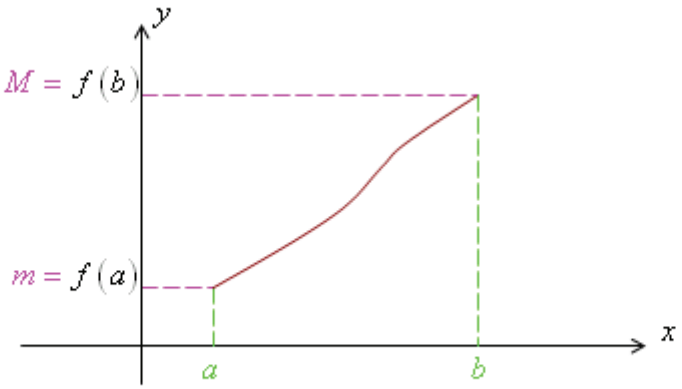
ونكتب : $f([a,b])=[m,M]$

خاصيــة :

صورة مجال من $\mathbb{R}$ بدالة متصلة هي مجال من $\mathbb{R}$.

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعا على $[a,b]$.

الحالة① : f تزايدية قطعا.



$$f([a,b]) = [m,M] = [f(a),f(b)]$$

نلاحظ أن :

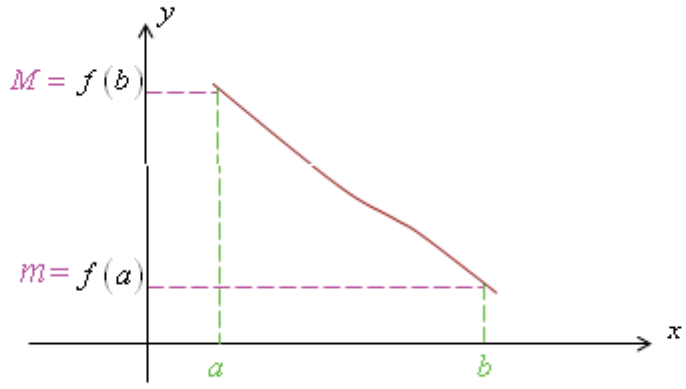
$$(\forall y\in[m,M])\ (\exists' x\in[a,b])\ /\ f(x)=y$$

وهذا يعني أن :

لكل عنصر من المجال : $J=[m,M]$ سابق وحيـد من $I=[a,b]$.

وفي هذه الحالة نقول أن : f تقابـل من $I=[a,b]$ نحو المجال $J=[m,M]$.

الحالة② : f تناقصية قطعا.



$$f([a,b]) = [f(b),f(a)]$$

خاصيــة :

إذا كانت f متصلة ورتيبة قطعا على المجال $[a,b]$ فإنها تقابـل من $[a,b]$ نحو $f([a,b])=[m,M]$.

تحديد صورة مجال :

- الحالة① : f تزايدية قطعا.

I	$J=f(I)$
$[a,b]$	$[f(a)\ ;f(b)]$

$[a,b[$	$\left[f(a) \ ; \ \lim\limits_{\substack{x\to b \\ x<b}} f \ x \right[$
$]a,b]$	$\left] \lim\limits_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x) \ ; f \ b \right]$
$[a,+\infty[$	$\left[f(a) \ ; \ \lim\limits_{x\to+\infty} f \ x \right[$
$]-\infty,+\infty[$	$\left] \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \ ; \ \lim\limits_{x\to+\infty} f \ x \right[$

• **الحالة② :** f **تناقصية قطعا.**

I	$f(I)$
$[a,b]$	$[f(b) \ ; f(a)]$
$[a,b[$	$\left] \lim\limits_{x<b} f(x) \ ; f \ a \right]$
$]a,b]$	$\left[f(b) \ ; \ \lim\limits_{x>a} f \ x \right[$
$[a,+\infty[$	$\left] \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \ ; f \ a \right]$
$]-\infty,b]$	$\left[f(b) \ ; \ \lim\limits_{x\to-\infty} f \ x \right[$
$]-\infty,+\infty[$	$\left] \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \ ; \ \lim\limits_{x\to-\infty} f \ x \right[$

تطبيـــق :

حدد صورتي المجالين I **و** J **في الحالات التالية :**

• $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ $\qquad J=[0,2]$, $I=[0,+\infty[$

لدينا : f **متصلة على** $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

وبما أن :

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1-2}{x+1}$$
$$= 1 - \frac{2}{x+1}$$

إذن : f **تزايدية قطعا.**

ومنه : $f([0,2]) = [f(0) \ ; f \ 2 \ ] = \left[1 \ ; \ \dfrac{1}{3} \right]$

$$f([0,+\infty[) = \left[f(0) \ ; \ \lim_{x\to+\infty} f \ x \right[= [-1,1[$$

• $f(x)=\cos x$ $\quad ; \quad J=\mathbb{R}$ $\quad ; \quad I=[0,\pi]$

لدينا : f **متصلة وتناقصية قطعا على** I **.**

إذن : $f([0,\pi]) = [f(\pi) \ ; f(0) \ ]$

$$= [-1 \ ; \ 1]$$

ولدينا : f متصلة على $\mathbb{R}$.

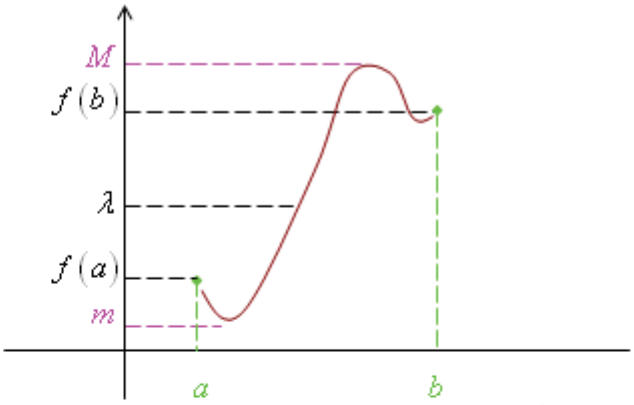
$$f(\mathbb{R}) = [-1\,;\,1]$$

5- مبرهنة القيم الوسطيــة (T.V.I)

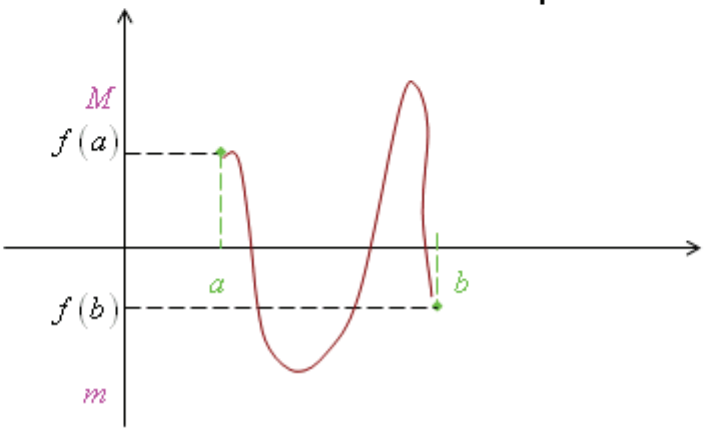
لتكن f دالة متصلة على $[a,b]$ و $f([a,b]) = [m,M]$

لدينا : لكل λ من $[m,M]$ سابق x من $[a,b]$.

وهذا يعني أنه لكل λ من $[m,M]$ المعادلة $f(x)=\lambda$ تقبل حل على الأقل في $[a,b]$.



نفترض أن : $0 \prec M$ و $m \prec 0$.



بما أن : $0 \in [m,M]$

فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا على الأقل في $[a,b]$.

مبرهنة القيم الوسطية :

إذا كانت f متصلة ورتيبة قطعا على $[a,b]$ و $f(a)\cdot f(b) \prec 0$

فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[a,b]$.

تطبيــق 1 :

لتكن f دالة متصلة على $[a,b]$ بحيث $f(a) \succ a$ و $f(b) \prec b$.

بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا على الأقل من المجال $[a,b]$.

الجـــواب :

نضع : $g(x) = f(x) - x$

بما أن : الدالة f متصلة على $[a,b]$.

فإن : الدالة g متصلة على $[a,b]$.

وبما أن : $g(a) = f(a) - a \succ 0$

و : $g(b) = f(b) - b \prec 0$

فإن : $g(a) \cdot g(b) \prec 0$

ومنه المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا على الأقل من $[a,b]$.

وبالتالي المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا على الأقل من المجال $[a,b]$.

تطبيـــق 2 :

بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا على الأقل في $\mathbb{R}$ في الحالات التالية :

-1 $f(x) = x^3 - 1$

-2 $f(x) = x^7 + x^2 - 1$

-3 $f(x) = 1 + \sin x - x$

الجـــواب :

-1 لدينا : f متصلة على $\mathbb{R}$.

ولدينا : $f(0) = -1$ و $f(2) = 7$

إذن : $f(0) \cdot f(2) \prec 0$

ومنه : $f(x) = 0$ تقبل حلا على الأقل في $\mathbb{R}$.

-2 لدينا : f متصلة على $\mathbb{R}$.

ولدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

و : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

ومنه : المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا على الأقل في $\mathbb{R}$.

-3 لدينا : f متصلة على $\mathbb{R}$.

و : $f(0) = 1 \succ 0$

و : $f(\pi) = 1 - \pi \prec 0$

إذن : $f(0) \cdot f(\pi) \prec 0$

ومنه : المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا على الأقل في $\mathbb{R}$.

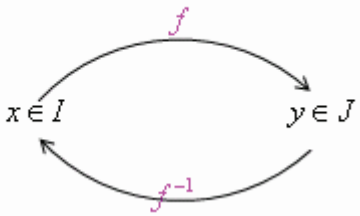
6- الدالة العكسية لدالة متصلة ورتيبة قطعا :

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعا على $I = [a,b]$ و $f(I) = J = [m,M]$

إذن : f تقابل من I نحو J.

ومنه فإن : الدالة f تقبل تقابل عكسي نرمز له بـ : f^{-1}.

الدالة f^{-1} تسمى الدالة العكسية للدالة f.



أمثلـــة :

-1 $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$

ليكن g قصور الدالة f على المجال $I=[0,+\infty[$.

بين أن : g تقابل من I نحو مجال J يجب تحديده.

ثم حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J.

الجـــواب :

-1 لدينا : g قصور f على $I=[0,+\infty[$.

و f دالة جذرية حيز تعريفها $\mathbb{R}$.

إذن : f متصلة على $\mathbb{R}$.

ومنه : g متصلة على I.

ولدينا : $\forall x\in I \qquad g(x)=\dfrac{x^2+1-1}{x^2+1}$

الدالة $x\mapsto x^2+1$ تزايدية على I (قطعا).

إذن : الدالة $x\mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$ تناقصية قطعا على I.

ومنه : $x\mapsto -\dfrac{1}{x^2+1}$ تزايدية قطعا على I.

ومنه : g تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$.

وبالتالي : g تقابل $\mathbb{R}^+$ نحو J.

- **تحديـد J :**

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$ **و** $g(0)=0$.

ومنه : $J=[0,1[$

- **لنحدد $g^{-1}(x)$ لكل x من $J=[0,1[$.**

لدينا : $\forall y\notin[0,+\infty[$ **و** $\forall x\in[0,1[$

$$g^{-1}(x)=y \Leftrightarrow x=g(y)$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{y^2}{y^2+1}$$

$$\Leftrightarrow x=1-\frac{1}{y^2+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{y^2+1} = -+x \quad 1$$

$$\Leftrightarrow \quad y^2+1 = \frac{1}{1-x}$$

$$\Leftrightarrow \quad y^2 = = \frac{1}{1-x} \quad 1 \quad \frac{x}{1-x}$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \pm\sqrt{\frac{x}{1-x}}$$

وبما أن : $y \succ 0$

فإن : $y = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$

ومنه : $\forall x \in J \; ; \; g^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$

-2 $f(x)=\sqrt{x} \qquad D_f=[0,+\infty[$

بين أن f **تقبل دالة عكسية** f^{-1} **وحدد حيز تعريف** f^{-1} **.**

ثم : $f^{-1}(x)$ **لكل** x **من** $D_{f^{-1}}$ **.**

الجـــواب :

لدينا : f **متصلة وتزايدية قطعا على** D_f **.**

إذن : f **تقابل من** $\mathbb{R}^+$ **نحو** $\mathbb{R}^+$ **.**

ومنه حيز تعريف f^{-1} **هو** $\mathbb{R}^+$ **.**

- **لنحدد** $f^{-1}(x)$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \; ; \; \forall \in \mathbb{R}^+$$

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y \quad f(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad y^2 = x$$

ومنه : $\forall y \in \mathbb{R}^+ \qquad f^{-1}(y)=y^2$

وبالتالي : $\forall x \in \mathbb{R}^+ \qquad f^{-1}(x)=x^2$

خاصيـــة :

لتكن f **دالة متصلة ورتيبة قطعا على** I **، و** $f(I)=J$

(1 $\forall x \in I \; ; \; \forall \in J \; ; \; f(x) \Leftrightarrow = x \quad f^{-1}(y)$

(2 $\forall x \in I \; ; \; f^{-1} \, o \, f(x) = x$

(3 $\forall y \in J \; ; \; f \, o \, f^{-1}(y) = y$

دراسة الدالة f^{-1} :

- **منحنى الدالة f (الرتابة)**

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعا على I. و f^{-1} الدالة العكسية للدالة f.

و : $f(I)=J$

ليكن x و y عنصرين مختلفين من J.

بحيث $f^{-1}(y)=b$ و $f^{-1}(x)=a$

لدينا :

$$T_{f^{-1}} = \frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(y)}{x-y}$$

$$= \frac{a-b}{f(a)-f(b)}$$

$$= \frac{1}{\frac{f(a)-f(b)}{a-b}} = \frac{1}{T_f}$$

إذن : $T_{f^{-1}} \times T_f \succ 0$

إذن f و f^{-1} لهما نفس المنحى.(الرتابة)

استنتاج وخاصية :

الدالتين f و f^{-1} لهما نفس المنحى . (الرتابة)

- **منحنى الدالة f^{-1} :**

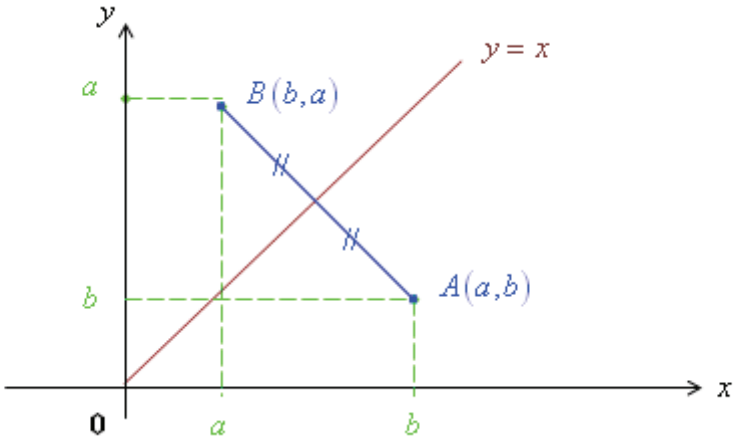
$$\ell_f = \{ M(x,y) \in P \ / \ x \in I \ \text{ و } \ f(x) = y \}$$

$$\ell_{f^{-1}} = \{ M(y,x) \in P \ / \ y \in J \ \text{ و } \ f^{-1}(y) = x \}$$

$$= \{ M(y,x) \in P \ / \ x \in I \ \text{ و } \ f(x) = y \}$$

ملاحظة :

النقطتين $B(b,a)$ و $A(a,b)$ متماثلتين بالنسبة للمنصف الأول $(y=x)$.



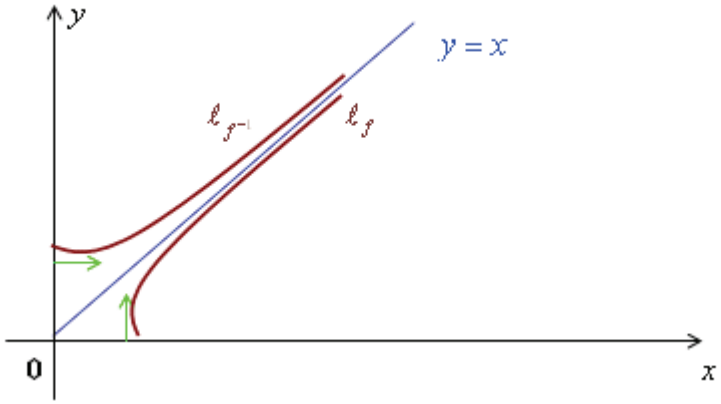
خلاصـة وخاصيـة :

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

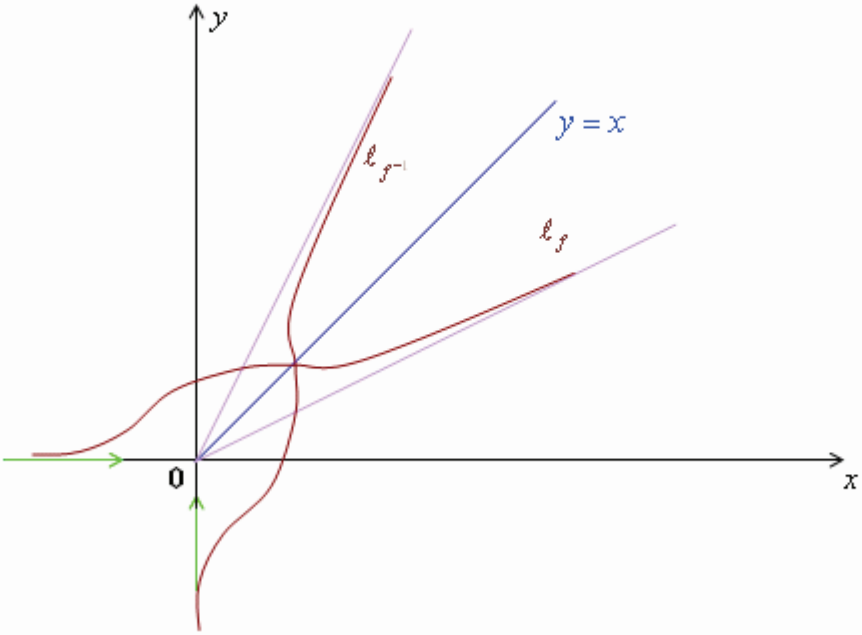
ℓ_f و $\ell_{f^{-1}}$ متماثلين بالنسبة للمنصف الأول.

أمثلـة :

• مثـل ① :



• مثـل ② :



أمثلة لبعض الدوال العكسية :

1. **دالة الجذر من الرتبة n** $\quad n \in \mathbb{N}^*$

الدالة $f:\left(x\mapsto x^n\right)$ متصلة وتزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$ و $f\left(\mathbb{R}^+\right)=\mathbb{R}^+$

إذن : f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على $\mathbb{R}^+$.

ونرمز لها بـ : $f^{-1}\left(x\right)=\sqrt[n]{x}$

نتائج وخاصيات :

(1) $\forall x\in\mathbb{R}^+\ ;\ \forall n\in\mathbb{N}^*$

$$\sqrt[n]{x^n}=x=\left(\sqrt[n]{x}\right)^n$$

$$f\left(x\right)=x^n$$

$$f^{-1}\left(x\right)=\sqrt[n]{x}$$

$$x=f^{-1}\left(f\left(x\right)\right)=\sqrt[n]{f\left(x\right)}=\sqrt[n]{x^n}$$

مثـال

$$\sqrt{4}=\sqrt[2]{4}=2$$
$$\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2$$
$$\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=2$$

(2) الدالة : $f^{-1}:x\mapsto\sqrt[n]{x}$ متصلة وتزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$.

(3) $\forall x,y\in\mathbb{R}^+$

$$\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{y}\ \Leftrightarrow\ x=y$$

$$\sqrt[n]{x}\succ\sqrt[n]{y}\ \Leftrightarrow\ x\succ y$$

(4) $\forall x,y\in\mathbb{R}^+\ ;\ \forall n\in\mathbb{N}^*$

$$\sqrt[n]{xy}=\sqrt[n]{x}\times\sqrt[n]{y}$$

$\forall x\in\mathbb{R}^+\ ;\forall x\in\mathbb{R}_+^*\ ;\forall n\in\mathbb{N}^*$

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

(5) $\forall x\in\mathbb{R}^+\ ;\ \forall n,m\in\mathbb{N}^*$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}=\sqrt[n\times m]{x}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}}$$

$$\sqrt[n]{x^m}=\left(\sqrt[n]{x}\right)^m$$

ملاحظـة :

$\forall a \in \mathbb{R}^+ \; ; \; \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a = a^1 \qquad a^{\frac{n}{n}} \qquad \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n$

إذن : $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

تعريـف :

ليكن a عددا من $\mathbb{R}^+$ و r عددا جذريا.
العدد a^r يسمى القوة الجذرية للعدد a ذات الأس r.

لتكن $r = \frac{p}{q} \; ; \; x \in \mathbb{R}^+$

$x^r = x^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p \qquad \sqrt[q]{x^p}$

اتصال مركبة دالة متصلة ودالة الجذر من الرتبة n :

نعتبر الدالة g المعرفة على I بـ : $g(x) = \sqrt[n]{f(x)}$

- إذا كانت f دالة موجبة على I ومتصلة في $x_0 \in I$ فإن g متصلة في x_0.
- إذا كانت f متصلة وموجبة على I فإن g متصلة على I.

مثـال :

$f(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$

الدالة : $x \mapsto x^2+1$ متصلة وموجبة على $\mathbb{R}$.
إذن : الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$.

نهاية مركبة دالة ودالة الجذر من الرتبة n :

لتكن f دالة متصلة وموجبة على I. و $x_0 \in I$

إذا كانت : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$

فإن : $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$

على الخصوص :

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$

تطبيقـات :

أحسب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{x^3+1}}$

طريقـة 1 :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{x^3+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1-\dfrac{3}{x^2}}}{x\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x^3}}} = 1$$

طريقـة 2 :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{x^3+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x^2-3\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^3+1\right)^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x^2-3\right)^{\frac{3}{6}}}{\left(x^3+1\right)^{\frac{2}{6}}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[6]{\frac{\left(x^2-3\right)^3}{\left(x^3+1\right)^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt[6]{\frac{x^6}{x^6}} = 1$$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{6}}} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}} \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^6}$